UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22203 Matemática Básica – Ayudantía 03

Axiomas de Orden de $\mathbb{R}$

Semana del 01 de Junio de 2020

3.1. Axiomas de Orden

Que el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales sea ***ordenado*** significa que existe un subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ tal que:

O1.	$a, b \in \mathbb{R}^+ \implies a + b \in \mathbb{R}^+$	Clausura de la Adición en $\mathbb{R}^+$
O2.	$a, b \in \mathbb{R}^+ \implies ab \in \mathbb{R}^+$	Clausura de la Multiplicación en $\mathbb{R}^+$
O3.	$a \in \mathbb{R} \implies a \in \mathbb{R}^+ \vee (-a) \in \mathbb{R}^+ \vee a \in \{0\}$	Tricotomía (Versión 1)

Para poder aterrizar este Axioma de Orden, veremos algunas definiciones que nos permitirán aplicarlo posteriormente:

Definición 1: Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Diremos que a ***es menor que*** b si $(b - a) \in \mathbb{R}^+$.
(Notación: $a < b$).

Definición 2: Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Diremos que a ***es menor o igual que*** b si $(a < b \ \vee \ a = b)$.
(Notación: $a \leqslant b$).

Definición 3: Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Diremos que a ***es mayor que*** b si $b < a$.
(Notación: $a > b$).

Definición 4: Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Diremos que a ***es mayor o igual que*** b si $(a > b \ \vee \ a = b)$.
(Notación: $a \geqslant b$).

OBS:	Notar que $a > 0 \Leftrightarrow 0 < a \Leftrightarrow (a - 0) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$	$\therefore,\ \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$
	De forma análoga, $\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} \mid (-a) \in \mathbb{R}^+\}$	
	Finalmente, notar que $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+ \vee (-a) \in \mathbb{R}^+ \vee a \in \{0\}$	$\therefore,\ \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$

3.2. Demostraciones de Orden

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a < b \vee a > b \vee a = b$ (Tricotomía Versión 2).

Demostración: Hacemos $x = b - a$. Entonces, por O3 se cumple que:

$$
\begin{aligned}
\implies \quad & x \in \mathbb{R}^+ \vee (-x) \in \mathbb{R}^+ \vee x \in \{0\} \\
\iff \quad & (b - a) \in \mathbb{R}^+ \vee -(b - a) \in \mathbb{R}^+ \vee (b - a) = 0 \\
\iff \quad & (b - a) > 0 \vee -(b - a) > 0 \vee (b - a) = 0 \\
\iff \quad & (b - a) > 0 \vee (a - b) > 0 \vee (b - a) = 0 \\
\iff \quad & a < b \vee b < a \vee a = b \\
\iff \quad & a < b \vee a > b \vee a = b
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\therefore,\ a, b \in \mathbb{R} \implies a < b \vee a > b \vee a = b} \quad \square. \tag{1}$$

OBS: Debido a la demostración anterior, podemos reescribir (O3):

O3. $a \in \mathbb{R} \Longrightarrow a < 0 \vee a > 0 \vee a = 0$ Tricotomía (Versión 2)

2. $a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \Longrightarrow a + c < b + c$**.**

Demostración:

$$\begin{aligned} a < b \quad &\Longleftrightarrow \quad b - a > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (b - a) + (c - c) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (b + c) - (a + c) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a + c < b + c \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c} \quad \square\,. \tag{II}$$

3. $a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge c > 0 \Longrightarrow ac < bc$**.**

Demostración:

$$\begin{aligned} a < b \wedge c > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad b - a > 0 \wedge c > 0 \\ (\text{O2}) &\Longrightarrow \quad c(b - a) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad bc - ac > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad ac < bc \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge c > 0 \Longrightarrow ac < bc} \quad \square\,. \tag{III}$$

4. $a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge c < 0 \Longrightarrow ac > bc$**.**

Demostración:

$$\begin{aligned} a < b \wedge c < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad b - a > 0 \wedge (-c) > 0 \\ (\text{O2}) &\Longrightarrow \quad (-c)(b - a) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -bc + ac > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad ac > bc \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge c < 0 \Longrightarrow ac > bc} \quad \square\,. \tag{IV}$$

5. $a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge b < c \Longrightarrow a < c$ (Transitividad).

Demostración:

$$\begin{aligned} a < b \wedge b < c \quad &\Longleftrightarrow \quad b - a > 0 \wedge c - b > 0 \\ (\text{O1}) &\Longrightarrow \quad (b - a) + (c - b) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (c - a) + (b - b) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad c - a > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a < c \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge b < c \Longrightarrow a < c} \quad \square\,. \tag{V}$$

6. $a \in \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow a^2 > 0$**.**

Demostración:

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow \quad & a \in \mathbb{R}^+ \vee (-a) \in \mathbb{R}^+ \\ \Longleftrightarrow \quad & a > 0 \vee (-a) > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & a^2 > 0 \vee (-a)(-a) > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & a^2 > 0 \vee -(-a)(a) > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & a^2 > 0 \vee a^2 > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & a^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore\ ,\ a \in \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow a^2 > 0} \quad \square\ . \tag{VI}$$

7. Demostrar que $1 > 0$**.**

Demostración:

$$1 \neq 0 \Longrightarrow\ 1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$$

$$\boxed{\therefore\ ,\ 1 > 0} \quad \square\ . \tag{VII}$$

8. La ecuación $x^2 + 1 = 0$ **no tiene solución en** $\mathbb{R}$**.**

Demostración: Si $x = 0$, entonces $0^2 + 1 = 0 + 1 = 1 > 0$, por lo que $x = 0$ no es solución de la ecuación.

Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $x^2 > 0$, por lo que $x^2 + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$, por lo que x tampoco es solución de la ecuación.

$$\boxed{\therefore\ ,\ \nexists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0} \quad \square\ . \tag{VIII}$$

3.3. Ejercicios

Demostrar usando Axiomas y Propiedades vistas:

1. $a > 0 \Longrightarrow (-a) < 0$
2. $ab > 0 \Longrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
3. $(a < b \wedge c < d) \Longrightarrow a + c < b + d$
4. $(0 < a < b \wedge 0 < c < d) \Longrightarrow 0 < ac < bd$
5. $a > 0 \Longrightarrow a^{-1} > 0$
6. $0 < a < b \Longrightarrow b^{-1} < a^{-1}$
7. $x - 1 < x < x + 1$
8. $a < b \Longrightarrow a < \dfrac{a+b}{2} < b$
9. $a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2ab$
10. $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow$ $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geqslant 8a^2b^2c^2$
11. $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow (a+b+c)(bc+ca+ab) \geqslant 9abc$
12. $a, b \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$
13. $a \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow a^3 + \dfrac{1}{a^3} \geqslant a + \dfrac{1}{a}$
14. $a, b \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$
15. $a, b \in \mathbb{R}^+ \mid a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$
16. $a > 1 \Longrightarrow a^2 > a$
17. $0 < a < 1 \Longrightarrow a^2 < a$
18. $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$
19. $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$
20. $(a > 1 \wedge b > 1) \Longrightarrow ab + 1 > a + b$