UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22203 Matemática Básica – Ayudantía 04

Ejercicios Axiomas de Orden

Semana del 08 de Junio de 2020

Todos estas resoluciones corresponden a los ejercicios sugeridos en la Ayudantía 03:

Demostrar usando Axiomas y Propiedades vistas:

1. $a > 0 \implies (-a) < 0$
2. $(a < b \wedge c < d) \implies a + c < b + d$
3. $(0 < a < b \wedge 0 < c < d) \implies 0 < ac < bd$
4. $a > 0 \implies a^{-1} > 0$
5. $ab > 0 \implies (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
6. $0 < a < b \implies b^{-1} < a^{-1}$
7. $x - 1 < x < x + 1$
8. $a < b \implies a < \dfrac{a+b}{2} < b$
9. $a, b \in \mathbb{R} \implies a^2 + b^2 \geqslant 2ab$
10. $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \implies$ $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geqslant 8a^2b^2c^2$
11. $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \implies (a+b+c)(bc+ca+ab) \geqslant 9abc$
12. $a, b \in \mathbb{R}^+ \implies \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$
13. $a \in \mathbb{R}^+ \implies a^3 + \dfrac{1}{a^3} \geqslant a + \dfrac{1}{a}$
14. $a, b \in \mathbb{R}^+ \implies a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$
15. $a, b \in \mathbb{R}^+ \mid a < b \implies a^2 < b^2$
16. $a > 1 \implies a^2 > a$
17. $0 < a < 1 \implies a^2 < a$
18. $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$
19. $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$
20. $(a > 1 \wedge b > 1) \implies ab + 1 > a + b$

Solución: **<u>Para 1.</u>** $a > 0 \implies a + (-a) > 0 + (-a) \implies 0 > (-a) \implies (-a) < 0 \quad \square$.

<u>Para 2.</u>

$$\begin{aligned} a < b \wedge c < d &\implies a + c < b + c \ \wedge \ b + c < b + d \\ &\implies a + c < b + d \quad \square. \end{aligned}$$

<u>Para 3.</u>

$$\begin{aligned} 0 < a < b \wedge 0 < c < d &\implies 0 < ac < bc \ \wedge \ 0 < bc < bd \\ &\implies 0 < ac < bd \quad \square. \end{aligned}$$

<u>Para 4.</u> $a > 0 \implies a(a^{-1})^2 > 0 \implies (aa^{-1})a^{-1} > 0 \implies a^{-1} > 0 \quad \square$.

<u>Para 5.</u> Vemos rápidamente que si $a = 0$, entonces no se satisface la desigualdad.

$$\begin{aligned} a > 0 \ \wedge \ ab > 0 &\implies a^{-1}ab > 0 \implies b > 0 \\ a < 0 \ \wedge \ ab > 0 &\implies a^{-1}ab < 0 \implies b < 0 \quad \square. \end{aligned}$$

<u>Para 6.</u>

$$\begin{aligned} 0 < a < b &\implies a^{-1} > 0 \ \wedge b^{-1} > 0 \implies a^{-1}b^{-1} > 0 \\ a < b &\implies a(a^{-1}b^{-1}) < b(a^{-1}b^{-1}) \implies (aa^{-1})b^{-1} < (bb^{-1})a^{-1} \implies b^{-1} < a^{-1} \quad \square. \end{aligned}$$

Para 7.

$$\begin{aligned} 1 > 0 &\implies x + 1 > x \\ -1 < 0 &\implies x - 1 < x \quad \square . \end{aligned}$$

Para 8.

$$\begin{aligned} a < b &\implies a + a < a + b \\ a < b &\implies a + b < b + b \\ &\implies 2a < a + b < 2b \implies a < \frac{a+b}{2} < b \ \square . \end{aligned}$$

Para 9. $(a-b)^2 \geqslant 0 \implies a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \implies a^2 + b^2 \geqslant 2ab \ \square .$

Para 10. Ejercicio.

Para 11. Ejercicio.

Para 12.

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \overset{:ab>0}{\implies} \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \geqslant 2\frac{ab}{ab} \implies \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \quad \square .$$

Para 13. Ejercicio.

Para 14. Ejercicio.

Para 15.

$$\begin{aligned} a < b \ \wedge \ a > 0 &\implies a^2 < ab \\ a < b \ \wedge \ b > 0 &\implies ab < b^2 \\ &\implies a^2 < b^2 \quad \square . \end{aligned}$$

Para 16. Ejercicio.

Para 17. Ejercicio.

Para 18. Para que el ejercicio tenga sentido, debemos establecer restricciones:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \geqslant 0 \wedge \sqrt{b} \geqslant 0 \wedge \sqrt{a+b} \geqslant 0 \quad &\implies \quad a \geqslant 0 \ \wedge \ b \geqslant 0 \ \wedge \ a + b \geqslant 0 \\ &\implies (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b \geqslant a + b \\ &\implies \sqrt{a} + \sqrt{b} \ \geqslant \sqrt{a+b} \ \square . \end{aligned}$$

Para 19. Ejercicio.

Para 20.

$$\begin{aligned} a > 1 &\implies a - 1 > 0 \\ b > 1 &\implies b - 1 > 0 \\ \text{(Ax. O2)} &\implies (a-1)(b-1) > 0 \\ &\implies ab - a - b + 1 > 0 \\ &\implies ab + 1 > a + b \quad \square . \end{aligned}$$