UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22203 Matemática Básica – Ayudantía 06

Algunos Ejercicios Resueltos

Lunes 13 de Julio de 2020

6.1. Ecuaciones de Primer Grado

1. ¿Qué condiciones debe cumplir el parámetro t para que la ecuación tenga solución única?

$$x(1+4t) - 24 = 3xt - \frac{x}{2}$$

Solución: Vamos a desarrollar la ecuación, ignorando por un momento al parámetro t (es decir, resolveremos la ecuación hasta donde podamos):

$$x(1+4t) - 24 = 3xt - \frac{x}{2} \iff x + 4tx - 24 = 3xt - \frac{x}{2} \iff x + \frac{x}{2} + 4tx - 3tx = 24$$

$$\iff x(1 + \frac{1}{2} + 4t - 3t) = 24 \iff x\left(\frac{3}{2} + t\right) = 24$$

$$\boxed{t = \frac{-3}{2}} \implies x\left(\frac{3}{2} + \frac{-3}{2}\right) = 24 \iff x \cdot 0 = 24 \iff 0 = 24$$

$$\boxed{t \neq \frac{-3}{2}} \implies x\left(\frac{3}{2} + t\right) = 24 \iff x = \frac{24}{\frac{3}{2} + t}$$

Por lo tanto, la ecuación tendrá solución única si $\boxed{t \neq \frac{-3}{2}}$ □.

2. Resolver la ecuación $\dfrac{1}{x^2+3x-28} - \dfrac{1}{x^2+12x+35} = \dfrac{3}{x^2+x-20}$

Solución:

$$\frac{1}{x^2+3x-28} - \frac{1}{x^2+12x+35} = \frac{3}{x^2+x-20} \iff \frac{1}{(x+7)(x-4)} - \frac{1}{(x+7)(x+5)} = \frac{3}{(x+5)(x-4)}$$

RESTRICCIÓN: $(x+7) \neq 0 \wedge (x-4) \neq 0 \wedge (x+5) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x \neq -7} \wedge \boxed{x \neq 4} \wedge \boxed{x \neq -5}$

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{1}{(x+7)(x-4)} - \frac{1}{(x+7)(x+5)} - \frac{3}{(x+5)(x-4)} = 0 \\
&\iff \frac{(x+5) - (x-4) - 3(x+7)}{(x+7)(x-4)(x+5)} = 0 \\
&\iff \frac{x+5-x+4-3x-21)}{(x+7)(x-4)(x+5)} = 0 \\
&\iff \frac{-3x-12)}{(x+7)(x-4)(x+5)} = 0 \\
&\iff -3x - 12 = 0 \\
&\iff -12 = 3x \quad \iff \quad \boxed{-4 = x} \quad \square .
\end{aligned}$$

3. Resolver la ecuación $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{x^2}{a^2+ax}=\dfrac{x+a}{a}$

Solución:

$$\frac{1}{x+a}+\frac{x^2}{a^2+ax}=\frac{x+a}{a} \iff \frac{1}{x+a}+\frac{x^2}{a(a+x)}=\frac{x+a}{a}$$

RESTRICCIÓN: $(x+a)\neq 0 \wedge a\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x\neq -a} \wedge \boxed{a\neq 0}$

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{1}{x+a}+\frac{x^2}{a(a+x)}-\frac{x+a}{a}=0\\
&\iff \frac{a+x^2-(x+a)^2}{a(x+a)}=0\\
&\iff \frac{a+x^2-(x^2+2ax+a^2)}{a(x+a)}=0\\
&\iff \frac{a+x^2-x^2-2ax-a^2)}{a(x+a)}=0\\
&\iff \frac{a-2ax-a^2)}{a(x+a)}=0\\
&\iff \frac{a(1-2x-a)}{a(x+a)}=0\\
&\iff \frac{1-2x-a}{x+a}=0\\
&\iff 1-2x-a=0\\
&\iff 1-a=2x \quad \iff \quad \boxed{\frac{1-a}{2}=x} \quad \square\,.
\end{aligned}$$

6.2. Ecuaciones de Segundo Grado

4. ¿Cuál es el número racional que sumado con su recíproco es igual a $\dfrac{25}{12}$**?**

Solución: En este caso, lo importante es traducir bien el problema a una ecuación. En este caso, si llamamos x al número buscado, entonces su recíproco (es decir, su inverso multiplicativo) es $1/x$. Además, por el Axioma M3, podemos decir de inmediato que $x\neq 0$.

Entonces, la ecuación que representa el problema será:

$$\boxed{x+\frac{1}{x}=\frac{25}{12}}$$

Vamos a resolver la ecuación:

$$\begin{aligned}
x+\frac{1}{x}=\frac{25}{12} &\iff \frac{x^2+1}{x}=\frac{25}{12} \iff 12(x^2+1)=25x \iff 12x^2-25x+12=0\\
&\implies \Delta=(-25)^2-4(12)(12)=625-576=49>0\\
&\implies x_{1,2}=\frac{-(-25)\pm\sqrt{49}}{2(12)}=\frac{25\pm 7}{24} \implies x_1=\frac{25+7}{24}\wedge x_2=\frac{25-7}{24}\\
&\implies x_1=\frac{32}{24}\wedge x_2=\frac{18}{24}\\
&\implies \boxed{x_1=\frac{4}{3}}\wedge\boxed{x_2=\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

5. Resolver la ecuación $\sqrt{x+7+\sqrt{5(x-2)}}=3$.

Solución: En este caso, lo complicado es trabajar ahora con raíces. En primer lugar, deberíamos hacer las restricciones sobre la raíz del lado izquierdo; sin embargo, lo postergaremos un momento y resolveremos la ecuación:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+7+\sqrt{5(x-2)}}=3 &\iff \left(\sqrt{x+7+\sqrt{5(x-2)}}\right)^2=(3)^2\\ &\iff x+7+\sqrt{5(x-2)}=9\\ &\iff \sqrt{5(x-2)}=9-x-7\end{aligned}$$

En este punto, es conveniente escribir las restricciones. Para que una raíz exista, se debe cumplir que ***la cantidad subradical*** (lo que está bajo la raíz) ***sea no negativa*** (es decir, positiva o cero). Además, se debe cumplir que ***el valor final de la raíz también debe ser no negativo***. Hagamos ahora esas restricciones:

$$\sqrt{5(x-2)}\geqslant 0 \;\Rightarrow\; 5(x-2)\geqslant 0 \;\Rightarrow\; x-2\geqslant 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x\geqslant 2}$$

$$2-x\geqslant 0 \;\Rightarrow\; x-2\leqslant 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x\leqslant 2}$$

Con ambas restricciones, nos resulta un único candidato: $\boxed{x=2}$. Veamos si realmente es solución de la ecuación:

$$x=2 \;\Rightarrow \sqrt{x+7+\sqrt{5(x-2)}}=\sqrt{2+7+\sqrt{5(2-2)}}=\sqrt{9+\sqrt{0}}=\sqrt{9+0}=\sqrt{9}=3 \quad \square\,.$$

6. Resolver la ecuación $2x^2-5x+2=0$ por completación de cuadrados.

Solución: Procedemos según lo pedido:

$$\begin{aligned}2x^2-5x+2=0 &\iff 2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)+2=0 \iff 2\left[x^2-2\left(\frac{5}{4}\right)x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}\right]+2=0\\ &\iff 2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+2=0 \iff 2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{-25+16}{8}=0\\ &\iff \boxed{2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{-9}{8}=0} \iff 2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{8} \iff \left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}\\ &\iff x-\frac{5}{4}=\frac{3}{4} \;\vee\; x-\frac{5}{4}=\frac{-3}{4}\\ &\iff x=\frac{5}{4}+\frac{3}{4} \;\vee\; x=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\\ &\iff x=\frac{8}{4} \;\vee\; x=\frac{2}{4} \iff \boxed{x=2} \;\vee\; \boxed{x=\frac{1}{2}} \quad \square\,.\end{aligned}$$

7. Determinar una ecuación si sus raíces suman $-3/4$ y su producto es $3/5$.

Solución: Ya sabemos que en este caso estamos hablando de una Ecuación Cuadrática. En este caso, existen dos métodos de solución:

Método 1: Buscamos x_1 y x_2 soluciones de la ecuación. Con ello, se debe cumplir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = \frac{-3}{4} \ \wedge \ x_1x_2 = \frac{3}{5} &\iff \boxed{x_1 = -x_2 - \frac{3}{4}} \ \wedge x_1x_2 = \frac{3}{5} \\ &\iff \left(-x_2 - \frac{3}{4}\right) x_2 = \frac{3}{5} \\ &\iff -(x_2)^2 - \frac{3}{4}x_2 = \frac{3}{5} \\ &\iff -(x_2)^2 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{3}{5} = 0 \\ &\iff (x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{5} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es $\boxed{x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{5} = 0}$.

Método 2: Recordando que $x_1 + x_2 = \dfrac{-B}{A}$ y $x_1x_2 = \dfrac{C}{A}$, buscamos A, B y C tales que:

$$\begin{aligned} \frac{-B}{A} = \frac{-3}{4} \ \wedge \ \frac{C}{A} = \frac{3}{5} &\iff B = \frac{-3}{-4}A \ \wedge C = \frac{3}{5}A \\ &\iff B = \frac{3}{4}A \wedge C = \frac{3}{5}A \end{aligned}$$

Vemos que los valores de B y C dependen del valor de $A \in \mathbb{R} - \{0\}$. En particular, si $A = 1$, obtenemos la ecuación $\boxed{x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{5} = 0}$ $\square$.

8. Determine la naturaleza de las soluciones de la ecuación $3x^2 - 2x + 10 = 0$.

Solución: Para determinar lo anterior, haremos uso del discriminante de la ecuación:

$$A = 3, \ B = -2, \ C = 10 \implies \Delta = (-2)^2 - 4(3)(10) = 4 - 120 = -116 < 0$$

Por lo tanto, la ecuación no tendrá solución en $\mathbb{R}$ $\square$.