UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22203 Matemática Básica – Ayudantía 08

Inecuaciones en una variable

Semana del 10 de Agosto de 2020

8.1. Algunos conjuntos particulares

Definición: Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Definimos los siguientes conjuntos:

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	Conjunto cerrado entre a y b
$(a,b) =]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	Conjunto abierto entre a y b
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$	Conjunto abierto por la derecha entre a y b
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$	Conjunto abierto por la izquierda entre a y b
$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$	
$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	

Notar que el símbolo ∞ **no es un número real**, sino que representa la idea de que el conjunto no tiene fin (hacia el extremo en cuestión).

8.2. Inecuaciones en una variable

Una inecuación en una variable es una ***desigualdad entre dos expresiones que contienen dicha variable***. Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es **solución de la inecuación** si al evaluar la inecuación en a, se obtiene una desigualdad verdadera.

Resolver una inecuación es encontrar todas sus soluciones reales. En general, existen muchos valores de $\mathbb{R}$ que solucionan una ecuación, por lo que en general hablaremos de **conjunto solución** de una inecuación.

Ejemplo 1: Resolver $2x - 48 < x + 2$

Solución:

$$2x - 48 < x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < 50$$
$$\therefore, \ \boxed{S = (-\infty, 50)} \quad \square.$$

Ejemplo 2: Resolver $x^2 - 7x + 10 < 0$

Solución:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 < 0 \Leftrightarrow \ & (x-5)(x-2) < 0 \\ & \Longrightarrow [(x-5) > 0 \wedge (x-2) < 0] \vee [(x-5) < 0 \wedge (x-2) > 0] \\ & \Longrightarrow [x > 5 \wedge x < 2] \vee [x < 5 \wedge x > 2] \\ & \Longrightarrow S_1 = (-\infty, 2) \cap (5, +\infty) \vee S_2 = [2,5] \\ & \Longrightarrow S_1 = \varnothing \vee S_2 = (2,5) \end{aligned}$$

$$\therefore, \ \boxed{S = S_1 \cup S_2 = (2,5)}$$

También podríamos resolver el problema usando una Tabla:

	$(-\infty, 2)$	$(2, 5)$	$(5, +\infty)$
$x-2$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x^2-7x+10$	$+$	$-$	$+$

En este caso, vemos que el intervalo central cumple lo pedido. Luego, $S = (2, 5)$ $\square$.

Ejemplo 3: Resolver $\dfrac{2x+1}{x+2} < 1$

Solución: En primer lugar, debemos restringir las posibles soluciones de la inecuación:

$$x + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x \neq -2}$$

A continuación, debemos reescribir la inecuación para luego resolverla:

$$\frac{2x+1}{x+2} < 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x+1}{x+2} - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x+1-(x+2)}{x+2} < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x+1-x-2}{x+2} < 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\frac{x-1}{x+2} < 0} \; (*)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\; (x-1)(x+2) < 0 \\
&\Longrightarrow [(x-1) > 0 \wedge (x+2) < 0] \vee [(x-1) < 0 \wedge (x+2) > 0] \\
&\Longrightarrow [x > 1 \wedge x < -2] \vee [x < 1 \wedge x > -2] \\
&\Longrightarrow S_1 = (-\infty, -2) \cap (1, +\infty) \vee S_2 = (-\infty, 1) \cap (-2, +\infty) \\
&\Longrightarrow S_1 = \varnothing \vee S_2 = (-2, 1)
\end{aligned}$$

$$\therefore, \; \boxed{S = S_1 \cup S_2 = (-2, 1)}$$

Nuevamente, podemos resolver este problema usando una Tabla:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
%	$+$	$-$	$+$

En este caso, concluimos que $S = (-2, 1)$ $\square$.

Ejemplo 4: Resolver $\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-7)(2x+1)} > 0$

Solución: En primer lugar, debemos restringir las posibles soluciones. En este caso, se tiene:

$$(x-7)(2x+1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 7 \neq 0 \wedge 2x + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x \neq 7} \;\wedge\; \boxed{x \neq -1/2}$$

Como este problema involucra 4 factores, estaremos frente a 4 casos diferentes (son demasiados para escribirlos todos). Por ello, podemos resolver el problema usando una Tabla:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1/2)$	$(-1/2, 2)$	$(2, 7)$	$(7, +\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)(x+3)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-7)(2x+1)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
%	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

En este caso, concluimos que $\boxed{S = (-\infty, -3) \cup (-1/2, 2) \cup (7, +\infty)}$ $\square$.

Ejemplo 5: Resolver $3 + \dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{2x+1}$

Solución: Nuevamente debemos restringir las posibles soluciones de la inecuación:

$$x - 1 \neq 0 \wedge 2x + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x \neq 1} \wedge \boxed{x \neq -1/2}$$

En primer lugar, debemos reescribir la inecuación:

$$3+\frac{1}{x-1} > \frac{1}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{3(x-1)+1}{x-1} - \frac{1}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x-1} - \frac{1}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-2)(2x+1)-(x-1)}{(x-1)(2x+1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2+3x-4x-2-x+1}{(x-1)(2x+1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{6x^2-2x-1}{(x-1)(2x+1)} > 0$$

Observamos que $(6x^2 - 2x - 1)$ tiene discriminante positivo; luego, se tendrá que:

$$(6x^2 - 2x - 1) = \left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{6}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{6}\right) \Longleftarrow \frac{\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{6}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{6}\right)}{(x-1)(2x+1)} > 0$$

Como este problema involucra 4 factores, estaremos frente a 4 casos diferentes (son demasiados para escribirlos todos). Por ello, podemos resolver el problema usando una Tabla:

	$(-\infty, -1/2)$	$\left(-1/2, \frac{1-\sqrt{7}}{6}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{7}}{6}, \frac{1+\sqrt{7}}{6}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{7}}{6}, 1\right)$	$(1, +\infty)$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - \frac{1-\sqrt{7}}{6}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - \frac{1+\sqrt{7}}{6}$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
%	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

En este caso, concluimos que $\boxed{S = (-\infty, -1/2) \cup \left(\frac{1-\sqrt{7}}{6}, \frac{1+\sqrt{7}}{6}\right) \cup (1, +\infty)}$ $\square$.

Ejemplo 6: Resolver $7x > 6 + 3x^2$

Solución: En primer lugar, debemos reescribir la inecuación:

$$7x > 6 + 3x^2 \Leftrightarrow 0 > 3x^2 - 7x + 6 \Leftrightarrow \boxed{3x^2 - 7x + 6 < 0} \ (*)$$

Observamos que $(3x^2 - 7x + 6)$ tiene discriminante negativo; luego, se tendrá que $(3x^2 - 7x + 6) > 0$ (¿por qué?). Entonces, no existirá valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que se cumpla $(*)$.

$$\therefore, \ \boxed{S = \varnothing}$$

8.3. Ejercicios

Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $3x - 1 \geqslant 3 + x$
2. $\dfrac{x}{2} \geqslant 1 - \dfrac{x}{4}$
3. $x^2 - 3x - 10 < 0$
4. $x^2 + x > 12$
5. $x(x-7) > 8$
6. $(x-1)(x^2+x+1) > 0$
7. $-x^3 + 2x^2 + 3x < 0$
8. $x^3 > x^2$
9. $\dfrac{x+1}{1-x} < 0$
10. $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x} < 0$
11. $\dfrac{(x-2)^2}{x^2-1} \geqslant 0$
12. $\dfrac{x+4}{x-2} \leqslant 1$
13. $\dfrac{2x+5}{x+1} > \dfrac{x+1}{x-1}$
14. $\dfrac{x^2-5x+4}{x-3} < 0$
15. $1 + \dfrac{6}{x^2+3x+2} > \dfrac{6}{x+2}$
16. $x(x^4 - 7x^2 + 12) > 0$
17. $\dfrac{x^4 - 49x + 96}{x^2 - 7x + 12} > 7$
18. Si $a > 0$, resuelva $\dfrac{x-a}{x+a} \geqslant 0$.
19. Determine el valor de $m \in \mathbb{R}$ tal que $mx^2 + (m-1)x + (m-1) < 0$.
20. Explique por qué la desigualdad $x^2 + 1 < -5$ no tiene solución.