8) $a<b \implies a < (a+b)/2 < b$

Dem: $a < b \implies a+a < a+b \implies 2a < a+b \implies a < (a+b)/2$

$a < b \implies a+b < 2b \implies (a+b)/2 < b$

$\implies a < (a+b)/2 \ \wedge \ (a+b)/2 < b \implies a < (a+b)/2 < b$ //.

/ $x < y \Rightarrow x+z < y+z$
/ $x < y \ \wedge \ y < z \iff x<y<z$

9) $a^2 + b^2 >= 2ab$

Borrador: $a^2 + b^2 >= 2ab$
$\iff a^2 -2ab + b^2 >= 0$
$\iff (a-b)^2 >=0$ / Cierto, pues para x real se tiene $x^2 >= 0$

Dem: Como a y b reales, entonces (-b) real; luego, a+(-b) = a-b real.
Luego, se tiene:

$(a-b)^2 >=0$
$\implies a^2 – 2ab + b^2 >= 0$ / +2ab
$\implies a^2 – 2ab + b^2 + 2ab >= 2ab + 0$
$\implies a^2 + b^2 + (2ab – 2ab) >= 2ab$ / Neutro aditivo lado derecho
$\implies a^2 + b^2 + 0 >= 2ab$ / Inverso aditivo lado izquierdo
$\implies a^2 + b^2 >= 2ab$ / Neutro aditivo lado izquierdo.

18) sqrt(a+b) <= sqrt(a) + sqrt(b) / sqrt : raíz cuadrada (SQuare RooT)

Borrador: sqrt(a+b) <= sqrt(a) + sqrt(b) / $(\ )^2$ sqrt(a+b) >= 0 ^ a+b >= 0 ^ a>=0 ^ b >=0
$\iff$ a+b <= a + b + 2 sqrt(ab) / - a - b
$\iff$ 0 <= 2 sqrt(ab) / Cierto, pues ab >=0 ,entonces la raíz existe y además es no negativa!!!

Dem: Para que exista sqrt(a) se debe cumplir que **a >= 0**.
Para que exista sqrt(b) se debe cumplir que b >= 0.
Si a>0 y b>0, entonces ab>0 (Axioma de Orden).
Si a=0, entonces ab=0. Si b=0, entonces ab = 0.
Luego, ab >= 0.
Entonces, sqrt(ab) >= 0, por propiedades de existencia de raíces cuadradas.

$\implies$ sqrt(ab) > = 0
$\implies$ 2 sqrt(ab) >= 0 / + a + b
$\implies$ **a** + b + 2 sqrt(ab) >= a + b
$\implies$ $\text{sqrt}(a)^2 + \text{sqrt}(b)^2 + 2\,\text{sqrt}(ab)$ / $a = (\text{sqrt}(a))^2$, pues a >=0
$\implies$ $(\text{sqrt}(a) + \text{sqrt}(b))^2 >=$ **a + b** / a>=0 ^ b>=0 $\implies$ a+b>= 0 $\implies$ **sqrt(a+b) es un real**
$\implies$ $(\text{sqrt}(a) + \text{sqrt}(b))^2 >=$ **$(\text{sqrt}(a + b))^2$** / sqrt ( ), se puede pues ambos lados son no negativos.
$\implies$ sqrt(a) + sqrt(b) >= sqrt(a+b) // .

20) $(a>1 \wedge b>1) \Longrightarrow ab+1 > a + b$

Dem:

$a > 1 \Longrightarrow a-1 > 0$

$b > 1 \Longrightarrow b-1 > 0$

$x>0 \wedge y>0 \Longrightarrow x+y>0$ (O1)

$x>0 \wedge y>0 \Longrightarrow xy>0$ (O2)

$\Longrightarrow (a-1)(b-1) > 0$

$\Longrightarrow ab - a - b + 1 > 0 \quad / +a +b$

$\Longrightarrow ab + 1 > a + b$ // .