UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22212 Álgebra III - Ayudantía 02

Base Ortogonal y Ortonormal

Jueves 26 de Septiembre de 2019

1.1. Lo que necesitamos

- Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno. Un conjunto de vectores $S \subseteq V$ se dice ***ortogonal*** si $\forall u, v \in S$ $(u \neq 0_V \ \wedge \ v \neq 0_V \ \wedge \ \langle u, v \rangle = 0\ )$.
- Si $S \subseteq V$ es ortogonal y además $\forall v \in S:\ (\ ||v|| = 1\ )$ entonces el conjunto se dice ***ortonormal***.
- Para que un conjunto $S \subseteq V$ se diga ***base de*** V, se requiere que S sea linealmente independiente (L.I.) y además que S genere a V (obviamente, $0_V \notin S$).
- Es posible demostrar rápidamente que si $S \subseteq V$ es ortogonal (ortonormal), entonces S será L.I. Solamente faltaría demostrar que S genera a V.
- Una vez demostrado lo anterior, se obtendría que S es una ***base ortogonal (ortonormal)*** de V.

1.2. Ejercicios

1. Si en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ se define el producto interno $\langle (a,b),(c,d) \rangle = ac - ad - bc + 4bd$ (ya verificamos que efectivamente es un producto interno).
   a) Determine la norma de $u = (3,5)$.
   b) Determine la distancia entre u y $v = (-2,1)$.
2. Sea $W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\ :\ a + 2b - 3c = 0\}$. Determine una base para W.
3. Sea $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V. Demostrar que $S_2 = \{w_i \in V : w_i = av_1 + v_i \wedge a \in \mathbb{R}\}$ es también una base de V.
4. Verificar si el conjunto $S = \{\ (1,0,0); (1,1,0); (1,1,1)\ \}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ (considerar el producto interno usual).
5. Verificar si el conjunto $S = \{\ (1,1,1,1); (1,1,-1,-1); (1,-1,1,-1); (1,-1,-1,1)\ \}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ (considerar el producto interno usual).
6. Para el espacio $\mathbb{R}_2[x]$, se define la función $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ dx$.
   a) Verificar que la función dada es producto interno.
   b) Verificar que $S = \{1, x, x^2\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ bajo la función dada.

1.3. Algunas soluciones

1. Considerando que $\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac - ad - bc + 4bd$, $u = (3,5)$ y $v = (-2,1)$, entonces:

a) $$||u|| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{3\cdot 3 - 3\cdot 5 - 5\cdot 3 + 4(5\cdot 5)} = \sqrt{9-15-15+100} = \sqrt{79}$$

b) $$u - v = (3,5) - (-2,1) = (3+2, 5-1) = (5,4)$$

$$\Longrightarrow ||u-v|| = \sqrt{5\cdot 5 - 5\cdot 4 - 4\cdot 5 + 4(4\cdot 4)} = \sqrt{25-20-20+64} = \sqrt{49} = 7 \quad \square\,.$$

2. En primer lugar hay que demostrar que W es subespacio de $\mathbb{R}^4$; esto es:

- $W \neq \varnothing$

$$(0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge\ (0) + 2(0) - 3(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,0,0,0) \in W \ (W \neq \varnothing)$$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall u, v \in W\ (\alpha u + \beta v \in W)$:

$$u = (u_1,u_2,u_3,u_4) \in W \Longrightarrow u_1 + 2u_2 - 3u_3 = 0 \quad \wedge \quad v = (v_1,v_2,v_3,v_4) \in W \Longrightarrow v_1 + 2v_2 - 3v_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha u + \beta v = \alpha(u_1,u_2,u_3,u_4) + \beta(v_1,v_2,v_3,v_4) = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3, \alpha u_4 + \beta v_4)$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad (\alpha u_1 + \beta v_1) + 2(\alpha u_2 + \beta v_2) - 3(\alpha u_3 + \beta v_3) &= (\alpha u_1 + 2\alpha u_2 - 3\alpha u_3) + (\beta v_1 + 2\beta v_2 - 3\beta v_3)\\ &= \alpha(u_1 + 2u_2 - 3u_3) + \beta(v_1 + 2v_2 - 3v_3)\\ &= \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Ahora sí, buscaremos una base para el subespacio W:

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) \in W \quad &\Longrightarrow \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge\ a + 2b - 3c = 0\\ &\Longrightarrow \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge\ a = -2b + 3c\\ &\Longrightarrow \quad (a,b,c,d) = (-2b+3c, b, c, d)\\ &\Longrightarrow \quad (a,b,c,d) = b(-2,1,0,0) + c(3,0,1,0) + d(0,0,0,1)\end{aligned}$$

Entonces, nuestro candidato a base es $S = \{(-2,1,0,0);(3,0,1,0);(0,0,0,1)\}$, pues este conjunto genera a W. Falta demostrar que es L.I.:

$$\begin{aligned}&p(-2,1,0,0) + q(3,0,1,0) + r(0,0,0,1) = (0,0,0,0)\\ \Longrightarrow\ &-2p + 3q = 0 \ \wedge\ p = 0 \ \wedge\ q = 0 \ \wedge\ r = 0\end{aligned}$$

Finalmente, $S = \{(-2,1,0,0);(3,0,1,0);(0,0,0,1)\}$ es L.I., por lo que S es base de W $\square$.

3. Como S_1 es base de V, entonces S_1 es L.I. y además genera a V. Ahora veremos si S_2 cumple con los requisitos para ser base de V:

- S_2 es L.I.:

$$\begin{aligned}&q_1w_1 + q_2w_2 + \ldots + q_nw_n = 0_V\\ &\Longrightarrow\ q_1(av_1 + v_1) + q_2(av_1 + v_2) + \ldots + q_n(av_1 + v_n) = 0_V\\ &\Longrightarrow\ v_1(aq_1 + aq_2 + \ldots + aq_n + q_1) + v_2(q_2) + \ldots + v_n(q_n) = 0_V\\ S_1 \text{ es L.I.} \quad &\Longrightarrow aq_1 + aq_2 + \ldots + aq_n + q_1 = 0 \ \wedge\ q_2 = 0 \ \wedge \ldots \wedge\ q_n = 0\\ &\Longrightarrow aq_1 + q_1 = 0 \ \wedge\ q_2 = 0 \ \wedge \ldots \wedge\ q_n = 0\\ &\Longrightarrow (a+1)q_1 = 0 \ \wedge\ q_2 = 0 \ \wedge \ldots \wedge\ q_n = 0\\ (a+1 \neq 0) &\Longrightarrow q_1 = 0 \ \wedge\ q_2 = 0 \ \wedge \ldots \wedge\ q_n = 0\\ &\Longrightarrow S_2 \text{ es L.I.}\end{aligned}$$

- S_2 genera a V:

$$
\begin{aligned}
u \in V &\iff u = \sum_{i=1}^{n} q_i v_i,\ v_i \in S_1 \\
\boxed{u = \sum_{j=1}^{n} t_i w_i,\ w_i \in S_2} &\iff u = \sum_{j=1}^{n} t_i (a v_1 + v_i) \\
&\iff u = \sum_{j=1}^{n} a t_i v_1 + t_i v_i \\
&\iff u = v_1 \left(t_1 + a \sum_{j=1}^{n} t_i \right) + \sum_{j=2}^{n} t_i v_i \\
q_1 = t_1 + a \sum_{j=1}^{n} t_i \wedge q_2 = t_2 \wedge \ldots \wedge q_n = t_n &\iff u = q_1 v_1 + \sum_{j=2}^{n} q_i v_i \\
&\iff \boxed{u = \sum_{i=1}^{n} q_i v_i,\ v_i \in S_1}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, S_2 también es base de V $\square$.

4. Consideraremos para $\mathbb{R}^3$ el producto interno usual. Verificaremos que para el conjunto $S = \{\ (1,0,0); (1,1,0); (1,1,1)\ \}$ se cumple:

(a) S es ortogonal.

(b) S es base de $\mathbb{R}^3$

Para (a):

$$
\begin{aligned}
\langle (1,0,0); (1,1,0) \rangle &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \neq 0 \\
\langle (1,1,0); (1,1,1) \rangle &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2 \neq 0 \\
\langle (1,0,0); (1,1,1) \rangle &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 \neq 0
\end{aligned}
$$

Eso sí, basta solamente con el primer producto para decir que S ***no es ortogonal***. Luego, S no puede ser base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ $\square$.

5. Consideraremos para $\mathbb{R}^4$ el producto interno usual. Verificaremos que para el conjunto $S = \{\ (1,1,1,1); (1,1,-1,-1); (1,-1,1,-1); (1,-1,-1,1)\ \}$ se cumple:

(a) S es ortogonal.

(b) S es base de $\mathbb{R}^4$

Para (a):

$$
\begin{aligned}
\langle (1,1,1,1); (1,1,-1,-1) \rangle &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 + 1 \cdot -1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \\
\langle (1,1,1,1); (1,-1,1,-1) \rangle &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\
\langle (1,1,1,1); (1,-1,-1,1) \rangle &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 + 1 \cdot -1 + 1 \cdot 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \\
\langle (1,1,-1,-1); (1,-1,1,-1) \rangle &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 + -1 \cdot 1 + -1 \cdot -1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \\
\langle (1,1,-1,-1); (1,-1,-1,1) \rangle &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 + -1 \cdot -1 + -1 \cdot 1 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\
\langle (1,-1,1,-1); (1,-1,-1,1) \rangle &= 1 \cdot 1 + -1 \cdot -1 + 1 \cdot -1 + -1 \cdot 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Para (b): Por Teorema, un conjunto ortogonal es L.I. Luego, falta verificar que S genera a $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) &= p(1,1,1,1)+q(1,1,-1,-1)+r(1,-1,1,-1)+s(1,-1,-1,1)\\ &= (p+q+r+s;p+q-r-s;p-q+r-s;p-q-r+s)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 1 & 1 & -1 & -1 & b\\ 1 & -1 & 1 & -1 & c\\ 1 & -1 & -1 & 1 & d\end{array}\right] \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a+b+c+d}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+b-c-d}{4}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a-b+c-d}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a-b-c+d}{4}\end{array}\right]$$

Finalmente, $S = \{\ (1,1,1,1);(1,1,-1,-1);(1,-1,1,-1);(1,-1,-1,1)\ \}$ es base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ $\square$.

Cabe mencionar aquí que existe una forma mucho menos tediosa de calcular los coeficientes a_i tales que $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, v_i \in S$, pero ello requiere suponer que S es base ortogonal de $\mathbb{R}^4$. En tal caso, los coeficientes se calcularán como:

$$\boxed{a_i = \frac{\langle u, v_i\rangle}{||v_i||^2}}$$

Es interesante como ejercicio demostrar esta mención.